Μαθημα 1º 2/3/2018

Ολοκληρωτικες

Ορισμος

Ολοκληρωτικη εξισωση ειναι μια εξισωση στην οποια η αγνωστη συναρτηση εμφανιζεται μεσα σε ολοκληρωμα

παραδειγμα

Εχουμε το εξης προβλημα αρχικων τιμων

$y'(t) = y(t) \quad , \quad y(0) = 1 \qquad t \geq 0$

Εχω σταθερους συντελεστες

για την επιλυση της (εφοσον προκειται για σταθερους συντελεστες)

παιρνουμε τη χαρακτηριστικη

$\lambda - 1 = 0$

μοναδικη λυση $\lambda = 1$

οποτε $y(x) = e^x$ λυση

Εαν ολοκληρωσουμε θα εχουμε

$$\int_0^t y'(s)\,ds = \int_0^t y(s)\,ds \Rightarrow$$

$$y(t) - y(0) = \int_0^t y(s)\,ds \Rightarrow$$

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s)\,ds$$

Ταξινομηση ολοκληρωτικων εξισωσεων

1) Ταξινομηση αναλογα με τα ακρα του ολοκληρωματος

• Ολοκληρωτικες εξισωσεις fredholm εαν το ολοκληρωμα εχει σταθερα ακρα

π.χ

$$y(t) = e^t - \lambda \int_0^1 k(t,s)\,y(s)\,ds \quad \text{οπου} \quad k(t,s) = \begin{cases} s(1+t), & 0 \leq t \leq s \\ t(1+s), & s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

• Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra αν το ολοκλήρωμα έχει μεταβλητά άκρα

π.χ

$$y(t) = t - \sin t + e^t(t-1) + \int_0^t [\sin t + e^t(t-s)]\, y(s)\, ds$$

ή

$$y(t) = \int_0^t (t-s) e^{-y(s)}\, ds.$$

2) Ταξινόμηση ανάλογα με τη γραμμικότητα ως προς την άγνωστη συνάρτηση

• Γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση αν η εξίσωση είναι γραμμική ως προς την άγνωστη συνάρτηση $y(t)$

(Δηλαδή αν η άγνωστη συνάρτηση δεν εμφανίζεται σε δυνάμεις μεγαλύτερες του 1 ή ως ορίσματα μη γραμμικών συναρτήσεων)

π.χ

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s)\, y(s)\, ds \quad , \quad t \in [t_0, t_0 + a]$$

όπου $K(t,s)$, $f(t)$ συνεχείς συναρτήσεις

• Μη γραμμικές ολοκληρωτικές συναρτήσεις εάν δεν υπάρχει γραμμικότητα ως προς την άγνωστη συνάρτηση

π.χ

$$y(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)\, y^2(s)\, ds$$

ή

$$y(t) = \int_0^t (t-s)\, e^{-y(s)}\, ds.$$

3) Ταξινόμηση ανάλογα με το αν η άγνωστη συνάρτηση εμφανίζεται μόνο μέσα στο ολοκλήρωμα ή και έξω από αυτό.

• Ολοκληρωτική εξίσωση α' είδους αν η άγνωστη συνάρτηση εμφανίζεται μόνο μέσα στο ολοκλήρωμα

π.χ

$$f(t) + \int_a^b K(t,s)\, y(s)\, ds = 0$$

• ολοκληρωτική εξίσωση β' είδους εαν η άγνωστη συνάρτηση εμφανίζεται μέσα αλλά και έξω από το ολοκλήρωμα

π.χ

$$y(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)\, y(s)\, ds$$

! Γενικός τύπος γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων

$$h(t)\, y(t) = f(t) + \int_a^{b(t)} K(t,s)\, y(s)\, ds$$

οπότε εαν

1) $b(t) = t$ τότε είναι ολοκληρωτική εξίσωση Volterra

a) εαν $h(t) = 0$ είναι Volterra α' είδους

$$-f(t) = \int_a^t K(t,s)\, y(s)\, ds$$

β) Εαν $h(t) = 1$ τότε ολοκληρωτική εξίσωση β' είδους

2) Εαν $b(t) = b$ τότε ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

$$h(t)\, y(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)\, y(s)\, ds$$

α) $k(t)=0$ είναι fredholm α' είδους
β) $k(t)=1$ είναι fredholm β' είδους

Η ολοκληρώσιμη συνάρτηση $k(t,s)$ που ορίζεται για $a \le t \le b$, $a \le s \le b$ και εμφανίζεται στις παραπάνω ολοκληρωτικές εξισώσεις λέγεται πυρήνας της εξίσωσης

▶ Επίσης συνήθως εάν θέλουμε να αναφερθούμε σε μια μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση χρησιμοποιούμε μια εξίσωση της μορφής

$$y(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s,y(t),y(s))\,ds \quad (*)$$

(για μη γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις fredholm β' είδους)

ή

$$y(t) = F\left(t, \int_a^b k(t,s,y(s),y(t))\,ds\right) \quad (**)$$

▶ Εάν η $(*)$ έχει την απλούστερη μορφή

$$y(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s,y(s))\,ds$$

Τότε έχουμε ολοκληρωτική εξίσωση Urysohn

• Εαν σε μια ολοκληρωτική εξίσωση το διάστημα ολοκλήρωσης είναι απέραντο ή ο πυρήνας απειρίζεται στο διάστημα ολοκλήρωσης τότε λέμε έχουμε μια ιδιάζουσα ολοκληρωτική εξίσωση.

Παράδειγμα

$$y(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-|t-s|} y(s)\, ds$$

ή άλλο π.χ

$$f(t) = \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^a} ds \quad , \quad 0<a<1$$ ολοκληρωτική εξίσωση Abel.

Είναι ιδιάζουσα γιατί ο πυρήνας $K(t,s) = \frac{1}{(t-s)^a}$ απειρίζεται για $t=s$

ομογενή

▷ Εαν σε μια ολοκληρωτική εξίσωση (Volterra ή Fredholm) ο όρος (από τους όρους που εμφανίζονται στα αθροίσματα που δεν περιέχει την άγνωστη) $f(t)$ είναι μηδέν.
($f(t)=0 \quad \forall\, t \in [a,b]$)
τότε λέμε ότι έχουμε μια ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση
διαφορετικά έχουμε μια μη ομογενή ολοκληρωτική εξ.

Ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις
Είναι ολοκληρωτικές εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται και η παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης
π.χ

$$\frac{dy(t)}{dt} + \int_a^b K(t,s)\, y(s)\, ds = f(t) \quad , \quad a \le t \le b$$

Scanned by CamScanner

(*) Έστω $F(t,s)$, $\frac{\partial F(t,s)}{\partial t}$ $a \le t \le b$, $t_0 \le s \le t_1$ συνεχείς ως προς t και s και a, b συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο $[a,b]$

Ισχύει η σχέση

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} F(t,s)\,ds = \frac{db(t)}{dt} F(t,b(t)) - \frac{da(t)}{dt} F(t,a(t)) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial F(t,s)}{\partial t}\,ds.$$

απόδειξη

θεωρούμε $G(a,b,t) = \int_a^b F(t,s)\,ds$ και έστω g συνάρτηση

$\frac{\partial g(t,s)}{\partial s} = F(s,t)$ τότε $G(a,b,t) = \int_a^b \frac{\partial g(t,s)}{\partial s}\,ds =$

$= g(t,b(t)) - g(t,a(t)) = g(t,b) - g(t,a)$ (1)

$$\begin{tikzcd} g(t,s) \arrow[r, bend left] & f(t,s) \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

f συνεχής ως προς s άρα ολοκληρώνω

κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial a}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{\partial G}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial G}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt} =$$

$$= \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial a}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{\partial G}{\partial b}\cdot\frac{db}{dt} \quad (2)$$

αλλά ισχύει (θα δείξουμε στη πορεία) ότι

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b F(t,s)\,ds \overset{(*)}{=} \int_a^b \frac{\partial F(t,s)}{\partial t}\,ds$$

Επίσης

$$\frac{\partial G}{\partial a} \overset{①}{=} \frac{\partial}{\partial a}\left(g(t,b)-g(t,a)\right) = -\frac{\partial}{\partial}g(t,a) \overset{(**)}{=} -F(t,a)$$

και

$$\frac{\partial G}{\partial b} \overset{①}{=} \frac{\partial g(t,b)}{\partial b} \overset{(**)}{=} F(t,b)$$

οπότε με αντικατάσταση στη σχέση ② έχουμε

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -F(t,a)\frac{da}{dt} + F(t,b)\frac{db}{dt} + \int_a^b \frac{\partial F(t,s)}{\partial t}\,ds.$$

▷ Μένει να δείξουμε την σχέση που αφήσαμε

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\alpha^b F(t,s)\,ds = \int_\alpha^b \frac{\partial F(t,s)}{\partial t}\,ds$$

Πράγματι θεωρούμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_c^y\int_\alpha^b \frac{\partial f(z,s)}{\partial z}\,ds\,dz$$ χώρος ολοκλήρωσης $[c,y]\times[a,b]$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini (f συνεχής ως προς t,s)

Έχουμε

$$\int_c^y\int_\alpha^b \frac{\partial f(z,s)}{\partial z}\,ds\,dz = \int_\alpha^b\int_t^y \frac{\partial f}{\partial z}(z,s)\,dz\,ds$$

(χρησιμοποιώντας το γνωστό θεώρημα απειροστικού λογισμού)

(Να το δοκιμάσω σπίτι)

$$\int_\alpha^b \frac{\partial f}{\partial y}(y,s)\,ds = \frac{d}{dy}\int_\alpha^b f(y,s)\,ds$$

Αλλη χρησιμη ιδιοτητα

$$\int_\alpha^t \int_\alpha^s f(r,x(r))\,dr\,ds = \int_\alpha^t (t-s)\, f(s,x(s))\,ds$$

αποδειξη

Φανερα ισχυει η ισοτητα για $t=\alpha$

Εστω

$$G_1(t) = \int_\alpha^t \int_\alpha^s f(r,x(r))\,dr\,ds \quad \text{και}$$

$$G_2(t) = \int_\alpha^t (t-s)\, f(s,x(s))\,ds$$

(θελω να δειξω ισοτητα δυο συναρτησεων)

Σκοπος μας να δειξουμε οτι οι συναρτησεις ειναι ιδιες

Θα παραγωγισω

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_\alpha^t \int_\alpha^s (r,x(r))\,dr\,ds = \int_\alpha^t f(r,x(r))\,dr$$

Επισης

$$\frac{\partial G_2}{\partial t} = \frac{d}{dt}\int_{\alpha \to a(t)}^{t \to b(t)} \underbrace{(t-s)\, f(s,x(s))}_{F(t,s)}\,ds = F(t,b(t))\,\frac{db(t)}{dt} - F(t,a(t))\,\frac{da(t)}{dt} +$$

$$+ \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} F(t,s)\,ds = (t-t)\, f(t,x(t))\cdot 1 - F(t,a)\cdot 0 + \int_\alpha^t f(s,x(s))\,ds =$$

$$= \int_\alpha^t f(s,x(s))\,ds$$

Αρα $\dfrac{dG_1(t)}{dt} = \dfrac{dG_2(t)}{dt}$

Αρα $\left.\begin{array}{l} G_1(t) = G_2(t) + C \\ G_1(\alpha) = G_2(b) \end{array}\right\} \Rightarrow C=0$

Οποτε $G_1(t) = G_2(t)$

Εφαρμογή

Να υπολογιστεί η παράγωγος

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \sin(t-s)\,u(s)\,ds$$

απάντηση

$a(t)=0$, $b(t)=t$, $F(t,s)=\sin(t-s)\,u(s)$

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \sin(t-s)u(s)\,ds = F(t,b(t))\frac{db(t)}{dt} - F(t,a(t))\frac{da(t)}{dt} +$$

$$+\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\sin(t-s)\,u(s)\,ds = 1\,\sin(t-t)\,u(t) - 0\,\sin(t-0)\,u(0)$$

$$+\int_0^t \cos(t-s)\,u(s)\,ds = \int_0^t \cos(t-s)\,u(s)\,ds$$

Σημείωση

Η παραπάνω τεχνική χρησιμοποιείται πολλές φορές για την μετατροπή Volterra ολοκλ. εξισώσεων.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα που αναφέραμε πριν

$$\int_\alpha^t\int_\alpha^s f(r,x(r))\,dr\,ds = \int_\alpha^t (t-s)\,f(s,x(s))\,ds$$

Από αυτό προκύπτει

$$\int_a^t\int_a^s f(z)\,dz\,ds = \int_a^t (t-s)\,f(s)\,ds$$

Επαγωγικα αποδεικνυεται

Αναγωγη προβληματων αρχικων και συνοριακων τιμων σε ολοκλ. εξισωσεις

• Μια διαφορικη εξισωση n-ταξης ειναι μια εξισωση της μορφης

$$\frac{d^n y}{dx^n} + F(x, y, y', \dots, y^{n-1}) \quad (*)$$

και λυση της ειναι μια n-φορες παραγωγισιμη συναρτηση y η ικανοποιει την (*)

• Μια Δ.Ε οριζεται σε ενα διαστημα I μαζι με καποιες συνθηκες που προσδιοριζουν την τιμη της συναρτησης και των παραγωγων της σε ενα συνολο λεγεται προβλημα αρχικων τιμων.

Scanned by CamScanner

• Μια ΔΕ ορισμένη σε ένα διάστημα μαζί με κάποιες συνθήκες προσδιορίζουν την τιμή της συνάρτησης και των παραγώγων σε περισσότερα σημεία λέγεται πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ)

Συνήθεις συνοριακές συνθήκες

1) Γενικές ή διαχωρίσιμες

$$\begin{cases} c_1 y(a) + c_2 y(a) = A \\ d_1 y(b) + d_2 y(b) = B \end{cases}$$

όπου $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ και $a_1^2 + d_2^2 \neq 0$

αυτές περιλαμβάνουν τις

1. $y(a) = A$, $y(b) = B$
2. $y(a) = A$, $y(b) = B$

2) Περιοδικές συνοριακές συνθήκες

$y(a) = y(b)$, $y'(\alpha) = y'(b)$

* Λέμε ότι έχουμε ΠΣΤ α' είδους αν έχουμε προκαθορισμένες τιμές της συνάρτησης σε δύο σημεία
ενώ β' είδους εάν έχουμε προκαθορισμένη τιμή της συνάρτησης σε ένα σημείο και προκαθορισμένη κλίση (τιμή παραγώγου) σε ένα άλλο σημείο

• Από ένα πρόβλημα αρχικών τιμών μπορούμε να μεταβούμε σε ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra

Από ένα ΠΣΤ σε ολοκλ. εξ. Fredholm